31/10/16

$X \subseteq A$

περιορισμός της σ στο X: σ_X

$$\sigma_X = \sigma \cap (X \times B)$$

παρ(1). $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(x,y) \in \sigma : |x| + |y| = 3$

$$\sigma = \{(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)\}$$

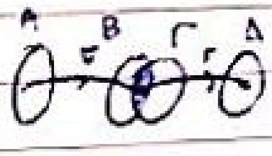
$\sigma_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad |x| + |y| = 3$

$$\sigma_1 := \{(0,3), (0,-3), (1,2), (-1,2), (-1,-2), (1,-2), (3,0), (-3,0), (2,1), (-2,-1), (2,-1), (-2, \ldots$$

$$\left\{ (x,y) : y = \pm(3-|x|),\ x \in \mathbb{N},\ |x| \leq 3 \right\}$$

$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\sigma = \{ (x,y) \quad x^2 = y^2 \}$



<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> (σύνθεση σχέσεων)

$\sigma : A \to B$ Σύνθεση των γ και σ:

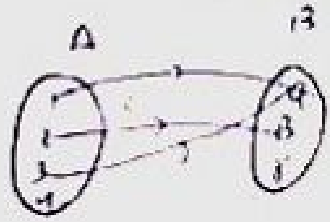
$\gamma : \Gamma \to \Delta$ $\gamma \circ \sigma \quad A \to \Delta$

$$\gamma \circ \sigma = \{ (x,y) : \exists z \in B \cap \Gamma \text{ με } x\sigma z \wedge z\gamma y \}$$

$B \cap \Gamma \neq \varnothing$

$(x,z) \in \sigma \wedge (z,y) \ldots$

$\sigma^{-1}\circ\sigma$



$\sigma^{-1}\circ\sigma = \{(1,1),(1,3),(9,2)\}$

$\sigma = \{(\alpha,1),(\alpha,2),(\beta,3),(\beta,5),(\gamma,2),(\gamma,1)\}$

$r = \{(1,7),(3,\sigma),(5,4),(9,\alpha),(4,2)\}$

$r\circ\sigma = \{(\alpha,7),(\beta,\sigma),(\beta,4),(\gamma,7)\}$

$\sigma\circ r = \{(9,2),(9,1)\}$

~~Ορισμός~~ Πρόταση

ας είναι $\sigma: A \to B$, $r: \Gamma \to \Delta$

ας ορίζεται η $r\circ\sigma$, τότε

$(r\circ\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\circ r^{-1}$

Ας είναι $(x,y) \in (r\circ\sigma)^{-1}$

τότε $(y,x) \in r\circ\sigma$

δηλ. $\exists z : (y,z) \in \sigma \wedge (z,x) \in r$

$\exists z \ (z,y) \in \sigma^{-1} \wedge (x,z) \in r^{-1}$

δηλ. $\exists z \ (x,z) \in r^{-1} \wedge (z,y) \in \sigma^{-1}$

$\Rightarrow (x,y) \in \sigma^{-1}\circ r^{-1}$

δηλ. $(r\circ\sigma)^{-1} \subseteq \sigma^{-1}\circ r^{-1}$

αντίστροφα ας είναι $(x,y) \in \sigma^{-1}\circ r^{-1}$ τότε $\exists z$...

$\sigma: E \to E$

~~σσσ~~ $R \times B$, $\sigma \subseteq E^2$ / ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΧΕΣΕΩΝ

(i) Ανακλαστική (αυτοπαθής): $\forall x \in E \Rightarrow (x,x) \in \sigma$

(ii) Συμμετρική: $(x,y) \in \sigma \Rightarrow (y,x) \in \sigma$

$\forall x,y \in E: x\sigma y \Rightarrow y \sigma x$

(iii) Αντισυμμετρική: $(x,y) \in \sigma,\ (y,x) \in \sigma \Rightarrow x = y$

$\forall x,y \in E: \left.\begin{matrix} x\sigma y \\ y \sigma x \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = x$

(iv) Μεταβατική: $\left.\begin{matrix} (x,y) \in \sigma \\ (y,z) \in \sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,z) \in \sigma$

$\forall x,y,z \in E: \left.\begin{matrix} x\sigma y \\ y \sigma z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \sigma z$

π.χ

$\sigma: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \sigma y \Leftrightarrow x + y = 12$

σ όχι ανακλαστική

co $1 \in \mathbb{R}^+$ όμως $1+1 \neq 12$

$\Rightarrow (1,1) \notin \sigma$

σ: αν $\left.\begin{matrix} (x,y) \in \sigma \Rightarrow x + y = 12 \\ y + x = 12 \\ (y,x) \in \sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ σ συμμετρική

σ: όχι αντισυμμετρική. $3+9=12 \Rightarrow (3,9) \in \sigma$

$9+3=12 \Rightarrow (9,3) \in \sigma$

όμως $3 \neq 9$.

σ: όχι μεταβατική: $\left.\begin{matrix} (5,7) \in \sigma \\ (7,5) \in \sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow (5,5) \notin \sigma$

$x \sigma y \Leftrightarrow x \rho y$

$\sigma \quad \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$x \sigma y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ με $x - y = 3k$

σ: είναι αναυλαστική : $x - x = 3 \cdot 0 \Rightarrow (x,x) \in \sigma$

σ: είναι συμμετρική $\quad x - y = 3k$

$$y - x = 3\lambda$$
$$= -(x-y) = -3k$$
$$= 3(-k)$$

σ: δεν είναι αντισυμμετρική $(6,3) \in \sigma \quad 6-3 = 3 = 3 \cdot 1$

$$(3,6) \in \sigma \quad 3-6 = -3 = 3 \cdot (-1)$$

$$3 \neq 6$$

σ: είναι μεταβατική

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in \sigma \\ (y,z) \in \sigma \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y = 3k_1, \; k_1 \in \mathbb{Z} \\ y - z = 3k_2, \; k_2 \in \mathbb{Z} \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow x - z = 3(\underbrace{k_1 + k_2}_{k \in \mathbb{Z}}) \Rightarrow (x,z) \in \sigma$$

σ: συμ + αντισ : $\subseteq \mathcal{D} = \{(x,x) : x \in E\}$